Exercice n° 8 $\theta \in]0,\pi[$

$(E_\theta): z^2 - e^{i\theta}\left(1+e^{i\theta}\right)z + e^{i3\theta} = 0$

● $\Delta = \left[e^{i\theta}(1+e^{i\theta})\right]^2 - 4e^{3i\theta}$

$= \left[e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta})\right] - 4e^{3i\theta}$

$= e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta}-4e^{i\theta})$

$= e^{2i\theta}(1+e^{2i\theta}-2e^{i\theta})$

$\Delta = (e^{i\theta})^2(1-e^{i\theta})^2 = \left[e^{i\theta}(1-e^{i\theta})\right]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(1-e^{i\theta})$ D'où :

$Z' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})+e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}+1-e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z' = e^{i\theta}}$

$Z'' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})-e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}-1+e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z'' = e^{2i\theta}}$

Conclusion : $S_C = \{e^{i\theta}, e^{2i\theta}\}$

● a) $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\theta} - 1|$

$BC = |z_C - z_B| = |e^{2i\theta} - e^{i\theta}|$

$BC = |e^{i\theta}(e^{i\theta}-1)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1}.|e^{i\theta}-1|$

$= |e^{i\theta}-1| = AB$

Donc le triangle ABC est isocèle de sommet B

b) Calculons la distance AC :

$AC = |z_C - z_A| = |e^{2i\theta}-1| = |(e^{i\theta}+1).(e^{i\theta}-1)|$

$= |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

On sait que ABC est isocèle de sommet B d'où pour que ce triangle soit équilatérale il faut que : AB = AC

Donc ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}-1| = |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

Puisque $\theta \neq 0$ alors $e^{i\theta} \neq 1$

Finalement ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}+1| = 1$

● a) $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ alors $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ par suite

Le module de $(1 + e^{i\theta})$ est $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et un argument de $(1 + e^{i\theta})$ est $\dfrac{\theta}{2}$

b) ABC est équilatéral si et seulement si $2\cos\dfrac{\theta}{2} = 1$

Donc $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

On aura alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta = -\dfrac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Or $\theta \in]0,\pi[$ Donc :

pour que ABC soit équilatéral il faut que

θ soit $\dfrac{2\pi}{3}$

Exercice n° 9

$(E): (1-i)z^2 - 2(\cos\theta + \sin\theta)z + 1 - i = 0$

1) On sait que dans l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ les solutions z_1 et z_2 vérifient $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

D'où on aura : $z_1 z_2 = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i).(1+i)}{1^2+1^2} = \dfrac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow z_2 = \dfrac{i}{z_1} \Rightarrow |z_2| = \left|\dfrac{i}{z_1}\right| = \dfrac{|i|}{|z_1|} = \dfrac{1}{|z_1|}$

Et $\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(i) - \text{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arg}(z_1)$

2) a)

- $1 - \sin 2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta.\cos\theta$

$= (\cos\theta - \sin\theta)^2$

- Résolution de l'équation (E) :

$\Delta' = (\cos\theta + \sin\theta)^2 - (1+i).(1-i)$

$= \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + 2\sin\theta.\cos\theta - 2$

$= \sin 2\theta - 1 = -(1 - \sin 2\theta)$

$= \left[i(\cos\theta - \sin\theta)\right]^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = i(\cos\theta - \sin\theta)$ d'où on aura :

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn